LA FACTORISATION

(3UAA5 : outils algébriques)

Comme vous l'avez sans doute appris, le retour à l'école n'est pas encore prévu pour tout de suite pour les classes de 3ème année. Nous ne pouvons toujours pas voir avec vous de nouvelles matières, et pourtant certains chapitres sont très importants pour la suite de votre scolarité en mathématique. C'est pourquoi je vais quand-même aborder avec vous le chapitre sur la factorisation, mais uniquement sur base de ce que vous avez vu en 2ème année. Les autres méthodes de factorisation feront peut-être l'objet d'un prochain document (si c'est permis).

13.1. Définition de la factorisation

Factoriser c'est transformer une somme ou différence de termes en un produit de facteurs.

13.2. Méthodes de factorisation à partir des prérequis de 2ème année

a) *La mise en évidence*

« Mettre un facteur en évidence » signifie « trouver un facteur commun aux différents termes ».

La mise en évidence est l'opération « inverse » de la distributivité.

$$a \cdot (b + c) \xrightarrow{\text{je distribue}} ab + ac$$

$$ab + ac \xrightarrow{\text{je mets en évidence}} a \cdot (b + c)$$

Rappel : le signe « . » n'est pas obligatoire entre deux lettres, entre un nombre et une lettre, entre un nombre et des parenthèses, entre une lettre et des parenthèses, entre deux parenthèses.

Lorsqu'on demande de factoriser par la mise en évidence, il faut toujours factoriser au maximum. C'est-à-dire qu'il ne peut plus y avoir aucun facteur commun aux différents termes présents dans les parenthèses.

- Au niveau des facteurs numériques, il faut mettre en évidence leur PGCD.
- Au niveau des facteurs littéraux, il faut mettre en évidence toutes les lettres en commun, chacune munie de son plus petit exposant.

Exemples :

$6x + 15y = \mathbf{3}\,(2x + 5y)$ — En effet, 3 est le PGCD de 6 et 15 ; $3 \cdot 2x = 6x$ et $3 \cdot 5y = 15y$

$8ab - 12bc = \mathbf{4b}\,(2a - 3c)$ — En effet, 4 est le PGCD de 8 et 12 ; $4b \cdot 2a = 8ab$ et $4b \cdot (-3c) = -12bc$

$39a^3 + 26a^2 = \mathbf{13a^2}\,(3a + 2)$ — En effet, 13 est le PGCD de 39 et 26 ; $13a^2 \cdot 3a = 39a^3$ et $13a^2 \cdot 2 = 26a^2$

$10x^5y^3 + 6x^2y^7 - 2x^2y^3 = \mathbf{2x^2y^3}\,(5x^3 + 3y^4 - 1)$ — En effet, 2 est le PGCD de 10, 6 et 2 ; $2x^2y^3 \cdot 5x^3 = 10x^5y^3$, $2x^2y^3 \cdot 3y^4 = 6x^2y^7$ et $2x^2y^3 \cdot (-1) = -2x^2y^3$

Attention : mise en évidence avec des parenthèses ⇨ ne jamais distribuer !!!
⇨ mettre en évidence les parenthèses !

Exemples : $a \,.\, (b - 1) + 3 \,.\, (b - 1) = \mathbf{(b - 1)}\,(a + 3)$

$$5 \,.\, (x + 2) - (x + 2) \,.\, (x - 1) = \mathbf{(x + 2)} \,.\, [5 - (x - 1)] = (x + 2)\,[5 - x + 1] = (x + 2)\,(6 - x)$$

$$x \,.\, (a - 3) + y \,.\, (3 - a) = x \,.\, (a - 3) - y \,.\, (a - 3) = \mathbf{(a - 3)} \,.\, (x - y)$$

En effet, $3 - a = -(a - 3)$

$$(b + 2c) \,.\, (x - 1) - (1 - x) \,.\, (3b - 4c) = (b + 2c) \,.\, (x - 1) + (x - 1) \,.\, (3b - 4c) = \mathbf{(x - 1)} \,.\, [(b + 2c) + (3b - 4c)] = (x - 1) \,.\, (4b - 2c)$$

b) *Les produits remarquables*

Rappel : formules des produits remarquables

$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ $\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ $\boldsymbol{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$

Exemples : $(x + 3y)^2 = x^2 + 2.x.3y + (3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$

$$(a^3 - 5b)^2 = (a^3)^2 - 2.a^3.5b + (5b)^2 = a^6 - 10a^3b + 25b^2$$

$$(2x - 3y)(2x + 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$$

Lorsqu'on appliquait ces formules, on transformait un produit de facteurs (ou une puissance) en une somme ou une différence de termes.

Dans le but de factoriser, nous allons donc à présent utiliser ces formules dans l'autre sens !

1) On est en présence d'un binôme (= 2 termes) :

- A-t-on un terme positif et un terme négatif ?
- A-t-on deux « carrés » ?

Une différence de deux carrés (binôme) peut s'écrire sous la forme d'un produit de deux binômes conjugués.

$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b).(a + b)}$

- Le 1er terme des deux binômes conjugués sera la racine carrée du carré positif.
- Le 2ème terme des deux binômes conjugués sera la racine carrée du carré négatif.

Exemples : $16 - a^2 = \mathbf{4}^2 - \mathbf{a}^2 = (4 - a) \,.\, (4 + a)$

$$4x^2 - 9 = (\mathbf{2x})^2 - \mathbf{3}^2 = (2x - 3) \,.\, (2x + 3)$$

$$-b^4 + 25c^6 = -(\mathbf{b^2})^2 + (\mathbf{5c^3})^2 = (5c^3 - b^2) \,.\, (5c^3 + b^2)$$

$$(\mathbf{x + 3})^2 - \mathbf{x}^2 = [(x + 3) - x] \,.\, [(x + 3) + x] = (x + 3 - x) \,.\, (x + 3 + x) = 3 \,.\, (2x + 3)$$

2) On est en présence d'un trinôme (= 3 termes) :

- A-t-on deux « carrés » positifs ?
- Le 3ème terme est-il le double produit des deux racines carrées de ces deux « carrés » ?

Un trinôme carré parfait peut s'écrire sous la forme du carré d'un binôme.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \quad \text{et} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Exemples :

$x^2 + 6xy + 9y^2 = \mathbf{x}^2 + 2.\mathbf{x}.\mathbf{3y} + (\mathbf{3y})^2$
$= (x + 3y)^2$

$9a^2 + 30a + 25 = (\mathbf{3a})^2 + 2.\mathbf{3a}.\mathbf{5} + \mathbf{5}^2$
$= (3x + 5)^2$

$16x^2 - 8x + 1 = (\mathbf{4x})^2 - 2.\mathbf{4x}.\mathbf{1} + \mathbf{1}^2$
$= (4x - 1)^2$

N'oubliez jamais qu'il est possible de vérifier sa factorisation :

- Vous avez utilisé la mise en évidence ? Vérifiez par la distributivité.
- Vous avez utilisé les produits remarquables ? Vérifiez en appliquant les formules vues en 2ème année.

c) Mise en évidence, puis produits remarquables

La première méthode de factorisation est TOUJOURS la mise en évidence.

Mais lorsque celle-ci a été appliquée, il faut essayer d'appliquer une autre méthode de factorisation pour continuer à décomposer le produit obtenu en un produit de facteurs les plus petits possibles.

Exemples :

$2x^2 + 20x + 50 = 2\,(x^2 + 10x + 25)$
$= 2\,(x + 5)^2$

$108a^3 - 75ac^2 = 3a\,(36a^2 - 25\,c^2)$
$= 3a\,(6a - 5c)\,(6a + 5c)$